数理解析研究所講究録
164巻 1972年 159-173

Pri nombra solvado de la Navier-Stokes'a ekvacio

Kaneko, Satiomi
Instituto de Industria Scienco
Universitato de Tokio

Takami, Hideo
Departemento de Aplikata Fiziko
Fakultato de Inĝenierscienco
Universitato de Tokio

Suzigaki

Navier-Stokes houteisiki no suutikai no genzyou ni tuite, ziqsai no keisan ni tazusawaru mono no gawa kara, sou de nai hito no tame ni, kantan na syoukai wo okonau.

§1 dewa, Navier-Stokes houteisiki no imi wo setumeisuru. §2 dewa, kaisekiteki atukai ni tuite kantan ni noberu. §3 dewa, suutikai wo motomeru gutaiteki na houhou wo, ikutuka no tenkeiteki na baai ni tuite setumeisuru. §4 dewa, suutikaihou sonomono to keisan keqka to ni tuite no ginmi wo okonau.

§1. Ekvacio de Navier-Stokes

La celo de tiu ĉi traktaĵo estas prezenti al matematikistoj perspektivon pri la nuna stato de nombra solvado de la Navier-Stokes'a ekvacio, skizitan de fluidodinamikistoj.

La fizika problemo de la movo de nekunpremebla viskoza fluido en regiono Ω (limigita aŭ ne limigita) povas esti formulata en komenc- kaj limvalora problemo por la sistemo de partialaj diferencialaj ekvacioj:

$$
(1.1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \dfrac{1}{Re}\Delta \boldsymbol{v} - \dfrac{1}{Re}\nabla p, & (t>0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, & \\ \boldsymbol{v}\big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}), & (\boldsymbol{x}\in\Omega) \\ \boldsymbol{v}\big|_{\partial\Omega} = \boldsymbol{v}_l(t), & (t>0) \end{cases}
$$

Kie $\boldsymbol{v}$ kaj p estas respektive la rapido kaj la premo (iamaniere sendimensiigitaj) de la fluido. La parametro Re, nomata la nombro de Reynolds, estas difinita kiel

$$
(1.2)\qquad Re = \frac{UL}{\nu}\,,^{*}
$$

kie U kaj L signifas rapidoskalon kaj longoskalon karakterizantajn la fluon kaj ĝian geometrion respektive, kaj ν estas la koeficiento de kinematika viskozeco. La unua ekvacio estas tiel nomata "ekvacio de Navier-Stokes".

§2. Skizo de analitika aproksimado

Antaŭ diskuti pri nombra solvado, ni prezentos skizon de la analitika aproksimado al solvado de la Navier-Stokes'a ekvacio. Tio ĉi servos por klarigi la karakterizan

---

* Ni uzos Re kiel fundamentan parametron laŭ delonga konvencio inter fluidodinamikistoj, kvankam ĝia inverso $1/Re$ estus pli familiara al kelkaj matematikistoj.

diferencon inter solvoj por granda kaj malgranda valoroj de la parametro Re; tia diferenco estas spegulataj ankaŭ en nombra solvado.

Por simpligi la priskribon, ni diskutos por kelka tempo pri ekvacioj kaj iliaj solvoj kiuj ne dependas de tempo t. Nia problemo estas

$$(2.1)\quad \begin{cases} \Delta v = \nabla p + Re\,(v\cdot\nabla)\,v, \\ \nabla\cdot v = 0, \\ v|_{\partial\Omega} = v_1. \end{cases} \qquad (x\in\Omega)$$

Pro nelineareco oni ne havas ekzaktan solvon de (2.1) escepte en kelkaj okazoj de precipe simplaj limkondiĉoj. Tial, en la ĝeneralaj okazoj, iu aproksima traktado estas necesa.

(1) Aproksimado de Stokes

La Navier-Stokes'a ekvacio estas priskribata en la formo

$$(2.2)\quad \Delta v - \nabla p = Re\,(v\cdot\nabla)\,v.$$

Por malgrandaj valoroj de Re, oni povas rigardi la dekstran membron kiel perturbaĵon. Metinte $Re = 0$, oni ricevas la aproksimanton de Stokes:

$$(2.3)\quad \begin{cases} \Delta v - \nabla p = 0, \\ \nabla\cdot v = 0. \end{cases}$$

Koncerne la solvadon de la limvalora problemo de (2.3) —— la unua ekvacio estas nomata la ekvacio de Stokes —— en du dimensioj, estas disvolvita funkciteoreta metodo kiu uzas du kompleksajn variablojn $z = x + iy$ kaj $\bar{z} = x - iy$

(Imai [5]). Tiu ĉi metodo ankaŭ prezentas sisteman iteracian procedon por plialtigi la aproksimadon surbaze de la perturba skemo (2.2). Tiu ĉi procedo estas eĉ kodigita por komputmaŝino en la okazo de iu interna problemo (Kuwahara kaj Imai [9]).

(2) Aproksimado de Oseen

Por la ekstera problemo en kiu la flurapido estas unuforma ĉe senlima distanco for de la korpo, Stokes'a ekvacio montriĝas ne utiligebla kiel taŭga aproksimanto al la Navier-Stokes'a ekvacio pro la jena fakto: en du dimensioj la problemo (2.3) ne havas solvon (la paradokso de Stokes); dume, en tri dimensioj la plialtigo de aproksimado laŭ (2.2) ne estas ebla, kvankam (2.3) havas solvon (la paradokso de Whitehead [16]).

Tamen, oni povas eviti ĉi tiun malfacilaĵon per la jena perturba skemo de la Oseen'a tipo:

$$(2.4)\quad \begin{cases} \Delta \boldsymbol{v} - Re\,(\mathbf{1}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} - \nabla p = Re\,((\boldsymbol{v}-\mathbf{1})\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v}, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \end{cases}$$

kie $\mathbf{1}$ signifas unitvektoron al kiu la rapidvektoro devas alproksimiĝi ĉe $|\boldsymbol{x}| \to \infty$. La unua ekvacio estas nomata la ekvacio de Oseen kiam ĝia dekstra membro estas anstataŭigita per 0.

Sistema procedo por solvi (2.4) ankaŭ estas disvolvita, kaj plie, la asimptota konduto (ĉe $|\boldsymbol{x}| \to \infty$) de la solvo de la Navier-Stokes'a ekvacio estas klarigita (Imai [4]).

(3) Aproksimado de limtavolo

Aproksimadoj (1) kaj (2) estas validaj nur por malgrandaj valoroj de la Reynolds'a nombro. Por tre granda Re, kontraŭe, oni havas tiel nomatan aproksimadon de limtavolo.

Kiam Re estas granda, ordinare aperas tia regiono nomata "limtavolo" —— tavolforma regiono de la fluido, ekzemple tuj apud la ŝurfaco de korpo aŭ muro —— en kiu la gradiento de rapido estas multe pli granda perpendikle al la fluo ol laŭlonge de ĝi.

En tia regiono, Navier-Stokes'a ekvacio estas aproksimata de la ekvacio de limtavolo post konvena sendimensiigo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)u = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \text{(en du dimensioj)} \tag{2.5}$$

kie $\mathbf{v} = (u,v)$, kaj ni prenis la x-akson en la lokala direkto de la fluo. La termo $\partial p/\partial x$ en la dekstra membro estas rigardata kiel konato, ĉar ĝi povas esti determinata per la solvo de la ekvacio de neviskoza fluo ($Re = 0$) kiu estiĝas ekster la limtavolo (vidu ekzemple Imai [6] aŭ Schlichting [13]).

Kontraste al la aproksimadoj (1) kaj (2), ekv. (2.5) estas esence nelineara. Tamen, ĝi estas malpli malfacile traktebla pro ĝia paraboleco kontraŭ la elipseco de la Navier-Stokes'a ekvacio.

§3. Nombra solvado de la Navier-Stokes'a ekvacio

Ĝis nun la metodo de finita diferenco estas uzita plej ofte por solvi direkte la Navier-Stokes'an ekvacion en individuaj konkretaj okazoj. Ni skizos la proceđon de tiu ĉi metodo pri kelkaj tipaj okazoj.

(1) Du-dimensia problemo

Pro la dua ekvacio de (1.1), ekzistas en la du-dimensia problemo skalara funkcio $\psi(x,y)$, nomata flufunkcio, kiu kontentigas la ekvaciojn

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = u, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -v. \end{cases}$$

Per enkonduko de ψ, oni povas redukti la komenc- kaj limvaloran problemon (1.1) al la jena:

$$(3.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\Delta\psi)}{\partial t} = \dfrac{1}{Re}\Delta\Delta\psi + \dfrac{\partial(\psi,\Delta\psi)}{\partial(x,y)}, \\ \psi|_{t=0} \quad : \quad \text{donita}, \\ \psi|_{\partial\Omega} \ \text{kaj} \ \dfrac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} \quad : \quad \text{donitaj}. \end{cases}$$

Por solvi nombre la problemon (3.2), estas oportune plue enkonduki alian funkcion $\omega(x,y)$ —— vorticecon* —— difinatan kiel

$$(3.3) \qquad \omega = -\Delta\psi.$$

Tiel oni havas, anstataŭ (3.2),

---

* Ĝenerale, la vorticeco estas difinata kiel la rotacio de rapidvektoro: $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{rot}\ \boldsymbol{v}$; en du dimensioj, ĝi povas esti rigardata kiel skalaro kaj oni ricevas (3.3) per (3.1).

$$
(3.4)\quad \begin{cases} \Delta\psi + \omega = 0, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial t} = \dfrac{1}{Re}\Delta\omega + \dfrac{\partial(\psi,\omega)}{\partial(x,y)}, \\ \psi|_{t=0} : \text{donita}, \\ \psi|_{\partial\Omega} \text{ kaj } \dfrac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} : \text{donitaj.} \end{cases}
$$

Por solvi (3.4) nombre, ni aproksimas ĝin anstataŭigante $\partial\omega/\partial t$ ekzemple per la antaŭdiferenca kvociento, kaj la x- kaj y-derivaĵojn per la centradiferencaj. La diferenc-ekvacioj tiel ricevitaj formas sistemon de kvadrataj ekvacioj pri la aproksimaj valoroj por ψ kaj ω ĉe la maŝpunktoj.

En eksteraj problemoj oni bezonas limkondiĉon ankaŭ ĉe la infinitpunkto. La asimptota formo de la solvo menciita en § 2, (2) prezentas necesan informon pri ĝi (vidu ekzemple Takami kaj Keller [14]).

Ni havas liberon elekti la formojn de diferencaj kvocientoj kiuj anstataŭas la derivaĵojn, kaj iu speciala elekto alia ol tiu supre menciita fakte kondukas al pli dezirinda stabileco en kalkulado sen ia perdo de akurateco (Ozawa [12]).

(3) Tri-dimensia problemo

Akssimetria fluo povas esti traktata sammaniere kiel en du dimensioj. Tamen, tio ĉi ne estas ebla* pri ĝenerala

---

* Oni ja povus elimini p kaj ricevi formale similajn ekvaciojn per enkonduko de la vektor-potencialon por rapido: $\mathbf{v} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\psi}$. Tamen, fariĝus pli malfacile solvi la ekvaciojn, ĉar $\boldsymbol{\psi}$ nun havus tri komponantojn kaj la limkondiĉo multe komplikiĝus.

tri-dimensia fluo sen simetrio, kaj tiam estas necese trakti la problemon per la originalaj variabloj v kaj p.

En ĉi tiu okazo, oni utiligas la fakton ke la rapidvektoro estas solenoida. Diferenciinte la duan ekvacion de (1.1), oni ricevas

$$\nabla \cdot \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \tag{3.5}$$

t.e., ankaŭ $\partial v / \partial t$ estas solenoida. Alivorte, la Navier-Stokes'a ekvacio reskribita en la formo

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{Re} \nabla p = \frac{1}{Re} \Delta v - (v \cdot \nabla) v \tag{3.6}$$

sugestas ke $\partial v / \partial t$ kaj $(1/Re)\nabla p$ estas respektive la solenoida kaj la senrotacia parto de la vektoro donita de la dekstra membro. Tial estas esence kalkuli nombre la projekcion de arbitra vektoro en la subspaco de solenoidaj vektoroj. Pri konkretaj procedoj por ĉi tio, la legantoj referencu ekzemple la traktaĵon de Goto [3] aŭ de Chorin [2].

§4. Kritika ekzameno de la nombraj metodoj kaj solvoj

Ni ekzamenos ĉi tie la nombrajn metodojn kaj la rezultojn kalkulitajn surbaze de ili.

(1) Ekzisto de la solvo

Ekvacio $\beta = 0$ signifu la diferencialan ekvacion (kune kun la necesaj komenc- kaj limkondiĉoj), kiu estis ricevita kiel modelo de iu fizika fenomeno kaj kiun ni deziras solvi.

(a) Ni pripensu la okazon, kie la ekzisto nur de la malforta solvo de $B = 0$ estas demonstrita. Eĉ tiam, ni povas esperi ke la solvo de la diferencekvacio konstruita sub ĝusta konsidero pri fizika signifo —— ekzemple, tiu pri konservo de iuj fizikaj kvantoj —— verŝajne donos fizike signifan aproksiman solvon.

En tia okazo ne estos taŭge preni la limiton $h \to 0$ (h signifas Δt, Δx, ktp.), sed estos eble ke la limito eĉ ne ekzistas aŭ donos nenian fizike singifan rezulton. Verŝajne ekzistas iu pozitiva limo h_0 por h, kiel speguliĝo de la fakto, ke la originala diferenciala ekvacio $B = 0$ mem estas tro idealigita modelo de la naturo. Tamen tio ne gravos praktike, ĉar h_0 probable estos multe pli malgranda ol la maŝlarĝo uzata en ordinaraj kalkuloj.

(b) Estas eble ke diferencekvacio $B_h = 0$ kiu ĝuste aproksimas $B = 0$ ne havas solvon por iuj apartaj valoroj de h, kvankam estas demonstrita la ekzisto de la solvo $K(B)$ de $B = 0$. Eĉ en tia okazo, la ekvacio $B_h = 0$ havas almenaŭ aproksiman solvon, ĉar ni havas la rilaton $B_h(K(B)) = o(1)$. Tial ni povas diri, ke ekzistas serio da aproksimaj solvoj de $B_h = 0$ kiuj konverĝas al la dezirata solvo $K(B)$ kiam $h \to 0$. En efektiveco, la plejmulto de nombra solvado apartenas al ĉi tiu kategorio.

(2) Unikeco de la solvo

Se la solvo $K(B)$ de la diferenciala ekvacio $B = 0$ ne estas unika, estas praktike neeble trovi ĉiujn (aproksimajn) solvojn de $B_k = 0$, kvankam tio ĉi estas principe ebla ĉar nombra kalkulado ĉiam disponas finitan nombron de nekonatoj kun finita nombro de ciferoj.

En la problemo ne dependa de la tempo, oni ordinare komencas iteracian kalkuladon kun la valoroj de la variabloj kiuj ŝajnas fizike pravaj. Pro tio oni ne povas esperi ricevi tian solvon kiu havas neatenditan formon.

La solvo ne trovebla per ordinaraj metodoj verŝajne rilatas al tia fenomeno, kiu estas nestabila aŭ realigebla nur en multe limigita situacio. Por trovi tian solvon estos necese aldoni kelkajn kondiĉojn, kiel ekzemple simetriecon, ktp.

(3) Akurateco de la solvo

En nombra kalkulado de la forto kiun korpo ricevas en fluo, la grado de la ekarto en la valoro de la forto ĝenerale pli malaltiĝas ol tiu de la tranĉekarto de la diferencekvacio mem.

Ekzemploj de nombra kalkulado pri la fluo ĉirkaŭ cilindro de cirkla kversekco ($Re = 100 \sim 150$) montras, ke la ekarto en la forto atingas kelkajn procentojn se oni uzas la diferenc-skemon kun akurateco de la dua grado kaj prenas 100×100 maŝpunktojn (Kaneko [7]). Estus necese centobligi la nombron de maŝpunktoj por redukti la ekarton per unu cifero. Tia kalkulo probable bezonus komputmaŝinon kun grandega rapido kaj ekstreme multaj rapidaj memoraparatoj.

(4) Dispono de malreguleco en la solvo

Kiam la lima kurbo havas malregulajn punktojn (angulojn, ekzemple), simpla aplikado de diferencmetodo reduktas la akuratecon de la solvo, eĉ se oni povus ankaŭ esperi pri konverĝo de la solvo al tiu de la diferenciala ekvacio (Matida, Kuwahara kaj Takami [11]).

En tia okazo, oni devas kombini la diferencsolvon kun la asimptota (analitika) solvo valida en la proksimo de la malregula punkto.

En ekstera problemo, la infinitpunkto ankaŭ estas malregula, kaj tial estas necese utiligi la asimptotan solvon por konservi la gradon de akurateco.

Kelkaj nekonataj parametroj ĝenerale aperas en tia kombina kalkulo de asimptota kaj nombra solvoj; ili estos iteracie determinataj en la procedo de solvado (Kaneko [7], Takami kaj Keller [14]).

(5) Rilato inter la Reynolds'a nombro kaj la maŝlarĝo

La nombra solvado pri tre granda Reynolds'a nombro prezentas gravan malfacilaĵon pro apero de la limtavoloj —— maldikaj regionoj tra kiuj la rapidkampo varias tre rapide. En ĉi tiu okazo estas necese preni ekstreme malgrandan maŝlarĝon; aŭ pli precize, la Reynolds'a nombro uh/ν, difinita pri lokala rapido kaj maŝlarĝo, devas esti sufiĉe malgranda. Tio denove postulus grandegan nombron de memor-aparatoj de komputmaŝino kaj preskaŭ nepraktike longan tempon por kalkulado. En tiu senco, estus sendanĝere preni ke la kalkuloj pri $Re \gtrsim 100$ ne prezentos sufiĉan akuratecon en la nuna stato de komputmaŝino.

Aliflanke, oni havas en tia okazo tute alian aproksim-metodon: oni anstataŭigas la limtavolon per serio da apartaj vorticaj filamentoj, kaj sekvas iliajn movojn en la neviskoza rapidkampo estigita de ili mem. Tio kondukas al komencvalora problemo de la sistemo de ordinaraj diferencialaj ekvacioj, kiu estas solvebla ankaŭ per diferencmetodo. Ekzemple, la movo de vorticaj tavoloj foririntaj de korpo estas studitaj tiamaniere (Kuwahara kaj Takami [10]).

La solvo per ĉi tiu metodo kompreneble ne povas priskribi detalojn de la interno de la limtavolo; ĝia merito konsistas prefere en tio, ke oni povas esplori la totalan fluon kaj kalkuli la forton kiun la korpo ricevas, kun relative granda akurateco kaj per multe pli simpla kalkulprocedo ol tiu por direkte solvi la ekvacion de Navier-Stokes aŭ de limtavolo.

(6) Tempdependa problemo

En tempdependa problemo, oni ofte renkontas tre malregulan komenckondiĉon —— ekzemple, impulseman movon de korpo aŭ muro. En tia okazo estas necese utiligi asimptotan solvon (kiam $t \to 0$) kaj kombini ĝin kun nombra solvo kiel priskribite en (4).

Oni kompreneble povas utiligi tempdependan ekvacion por atingi la solvon de netempdependa ekvacio, se ĝi iel ekzistas, prenante la limiton por $t \to \infty$ de la solvo de la antaŭa ekvacio (Kawaguti kaj Jain [8]).

Aliflanke, ni notos ke la plejmulto de iteracia procedo por solvi netempdependan ekvacion estas ekvivalenta al procedo por solvi iun tempdependan ekvacion. Surbaze de ĉi tiu fakto, oni povas akiri la solvon de netempdependa Navier-Stokes'a ekvacio, solvante iun hipotezan tempdependan ekvacion kiu ne respondas ekzakte al fizika fenomeno sed konservas ĝian esencan karakterizaĵon (Chorin [1], Teman [15]).

Referencaĵoj

1) Chorin, A. J.: A numerical method for solving incompressible viscous flow problems.
J. comput. Phys. 2 (1967) 12-26.

2) Chorin, A. J.: Numerical solution of the Navier-Stokes equations.
Math. Comput. 22 (1968) 745-62.

3) Goto, S.: Solenoidal na vektor-ba e no syaei no suutiteki toriatukai.
Aperonta en Suurikaiseki Kenkyuuzyo Koukyuuroku (la nuna volumo).

4) Imai, I.: On the asymptotic behaviour of viscous fluid flow at a great distance from a cylindrical body, with special reference to Filon's paradox.
Proc. Roy. Soc. A 208 (1951) 487-516.

5) Imai, I.: Theory of bluff bodies.
Univ. of Maryland, Tech. Note BN-104 (1957).

6) Imai, I.: Ryuutai-rikigaku (Iwanami, 1970).

7) Kaneko, S.: Navier-Stokes houteisiki no entyuu-gaibumondai no suutikeisan ni kansuru iti-houhou (toku ni dai Reynolds suu).
Suurikaiseki Kenkyuuzyo Koukyuuroku 52 (1968) 91-103.

8) Kawaguti, M. and Jain, P.: Numerical study of a viscous fluid flow past a circular cylinder.
J. Phys. Soc. Japan 21 (1966) 2055-62.

9) Kuwahara, K. and Imai, I.: Steady viscous flow within a circular boundary.
Phys. of Fluids Suppl. II (1969) 94-101.

10) Kuwahara, K. and Takami, H.: Numerical studies of two-dimensional vortex motion by a system of point vortices. Aperonta en J. Phys. Soc. Japan.

11) Matida, Y., Kuwahara, K. kaj Takami, H.: Forto kaj fortmomanto kiujn spertas cilindraforma objekto en du-dimensia fluo de Poiseuille.
Aperonta en Suurikaiseki Kenkyuuzyo Koukyuuroku.

12) Ozawa, S.: Kou Reynolds suu, 2 zigen, square cavity flow no suutikeisan.
Dai 3-kai Ryuutai-rikigaku Kouenkai Kouensyuu (1971) 139-42.

13) Schlichting, H.: Boundary-layer theory (McGraw-Hill, 1968) 6th ed.

14) Takami, H. and Keller, H. B.: Steady two-dimensional viscous flow of an incompressible fluid past a circular cylinder.
Phys. of Fluids Suppl. II (1969) 51-6.

15) Teman, R.: Sur la approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires, (I) et (II).
Arch. rat. Mech. Anal. 32 (1969) 135-52; 33 (1969) 377-85.

16) Whitehead, A. N.: Second approximations to viscous fluid motion.
Quart. J. pure appl. Math. 23 (1889) 143-52.

La sekvantaj traktaroj estas rekomendataj al tiuj, kiuj interesiĝas en diversaj konkretaj ekzemploj de nombra solvado de la fluidodinamikaj problemoj.

17) Proceedings of an International Symposium on High-Speed Computing in Fluid Dynamics (ed. by Frenkiel, F. N, and Stewartson, K., Amer. Inst. Phys., 1969) $\equiv$ Phys. of Fluids Suppl. II, 1969.

18) Buturigaku Ronbun Sensyuu 174, Ouyousuugaku VI ——— Ryuutai-rikigaku no houteisiki no suutikai (Nihon Buturigakukai, 1971).